Grafy

doc. Mgr. Jiří Dvorský, Ph.D.

Katedra informatiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
VŠB – TU Ostrava

Prezentace ke dni 12. února 2020



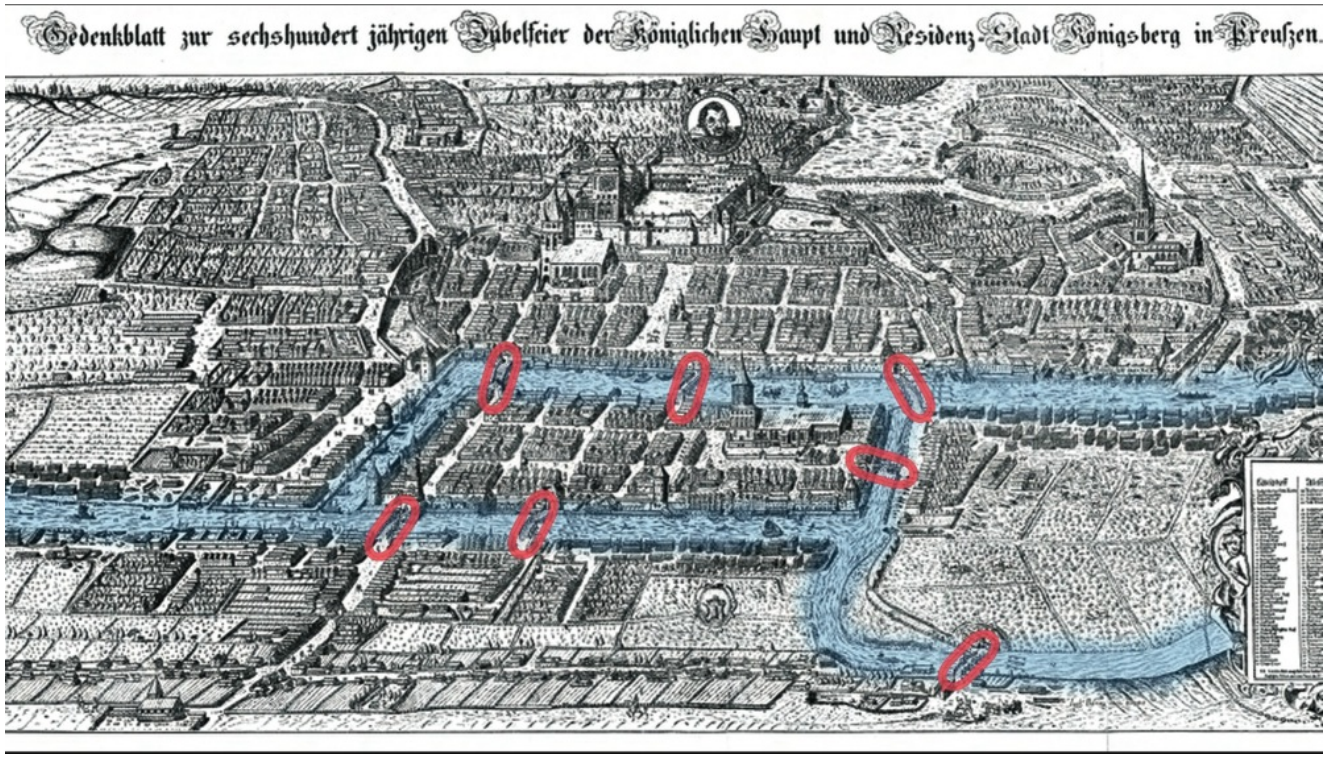
Osnova přednášky

Grafy

- Historické úlohy z teorie grafů
- Neorientovaný graf
- Pojmy založené na cestách v grafu
- Způsoby zadání grafu
- Stromy

Sedm mostů města Královce

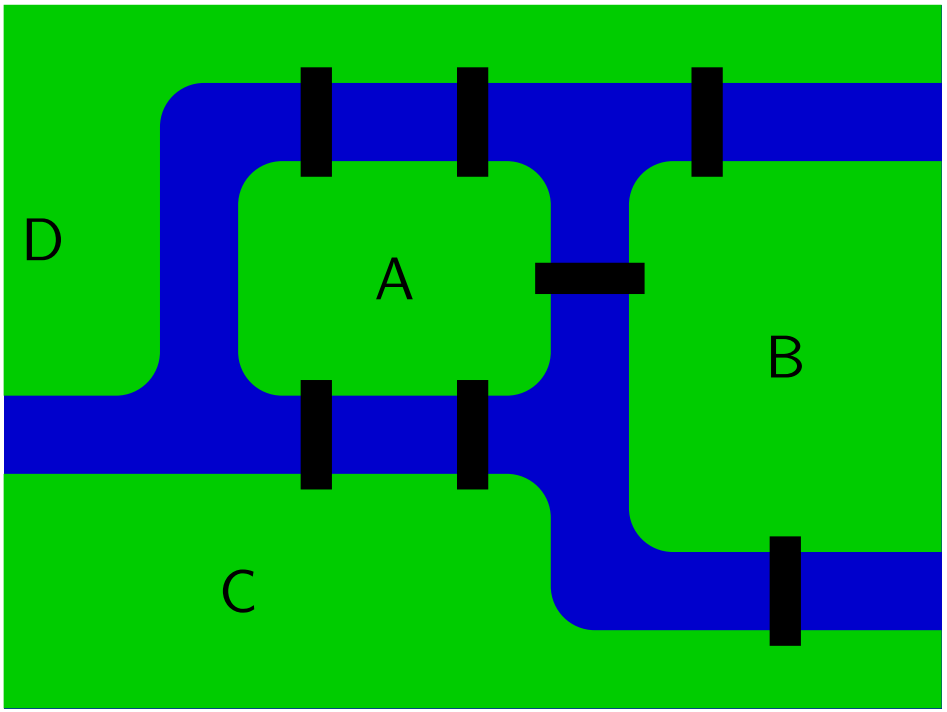
Pruské město Královec (též Königsberg, nyní Kaliningrad na území Ruska) leží na řece Pregole, která vytváří dva ostrovy. Ostrovy byly s ostatním městem spojeny sedmi mosty.



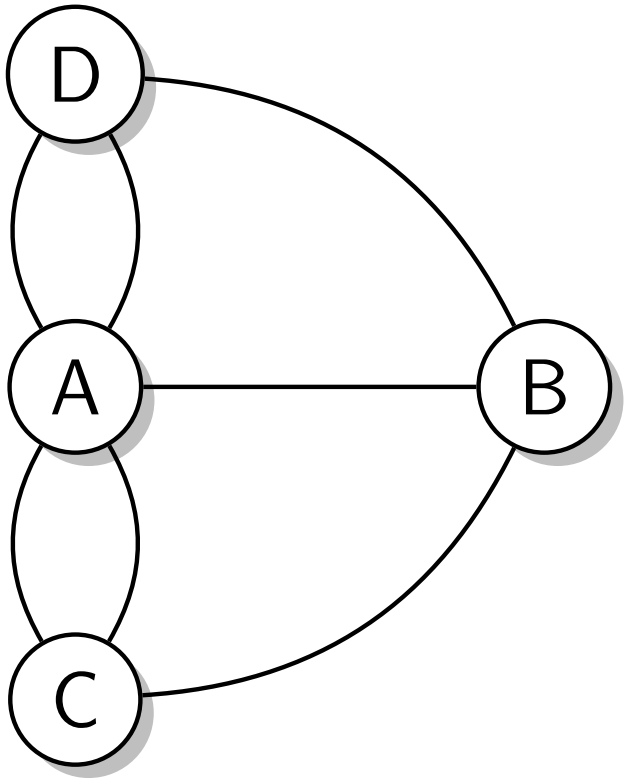
Otázka: Je možné všechny mosty přejít tak, aby ten, kdo se o to pokouší, vstoupil na každý most pouze jednou?

Sedm mostů města Královce

Schematická mapa

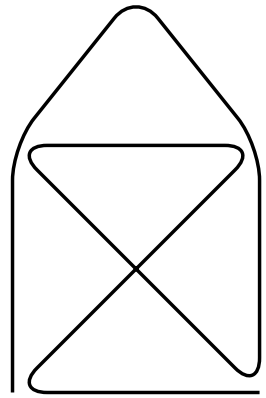


Graf



Sedm mostů města Královce – rozuzlení

- Řešení úlohy publikoval Leonhard Euler v roce 1736.
- Zadání formuloval pomocí teorie grafů, kterou při této příležitosti vytvořil.
- Nezáleží na fyzických tvarech pevniny nebo mostů, že záleží jen propojení pevnin (vrcholy) mosty (hrany).
- Takto vytvořený graf **nelze projít** pomocí eulerovského tahu – to jest tahu, který obsahuje každou hranu právě jednou.
- Existuje-li v grafu uzavřený eulerovský tah, nazýváme tento graf rovněž eulerovský. Eulerovské grafy lze nakreslit „jedním tahem“.



Teorie grafů – další historické úlohy

V roce 1845 publikoval **Gustav Kirchhoff** zákony, které platí v elektrických obvodech a slouží k výpočtu napětí a proudu v jednotlivých větvích obvodu.

V roce 1852 předložil Francis Guthrie takzvaný **problém čtyř barev** – tedy otázku, zda je možné obarvit libovolnou politickou mapu pomocí nejvýše čtyř barev tak, aby každé dvě sousední země (které mají společnou hranici delší než jediný bod) měly odlišnou barvu. Byl vyřešen až o více než sto let později, přičemž pro jeho řešení bylo zavedeno mnoho zásadních konceptů teorie grafů.

Grafy – motivace

- Jedná se o reprezentaci množiny objektů, u které chceme znázornit, že některé prvky jsou propojeny.
- Objektům se přiřadí vrcholy a jejich propojení značí hrany mezi nimi.
- Grafy slouží jako abstrakce mnoha různých problémů.
- Často se jedná o zjednodušený model nějaké skutečné sítě (například dopravní), který zdůrazňuje topologické vlastnosti objektů (vrcholů) a zanedbává geometrické vlastnosti, například přesnou polohu.

Grafy – motivace

Příklady abstrakce

1. kousek železniční sítě ČD, graf jako mapa, reálné názvy stanic, zachován fyzický tvar tratí,
2. zachováme topografické rozložení stanic a jejich názvy, tratě překreslíme úsečkami,
3. zachováme pouze názvy stanic, jejich rozložení můžeme libovolně měnit, u některých nakreslení grafu se budou hrany křížit u jiných ne, některá nakreslení grafu jsou pro lidské oko přehlednější
4. vynecháme názvy stanic a použijeme místo nich přirozená čísla.

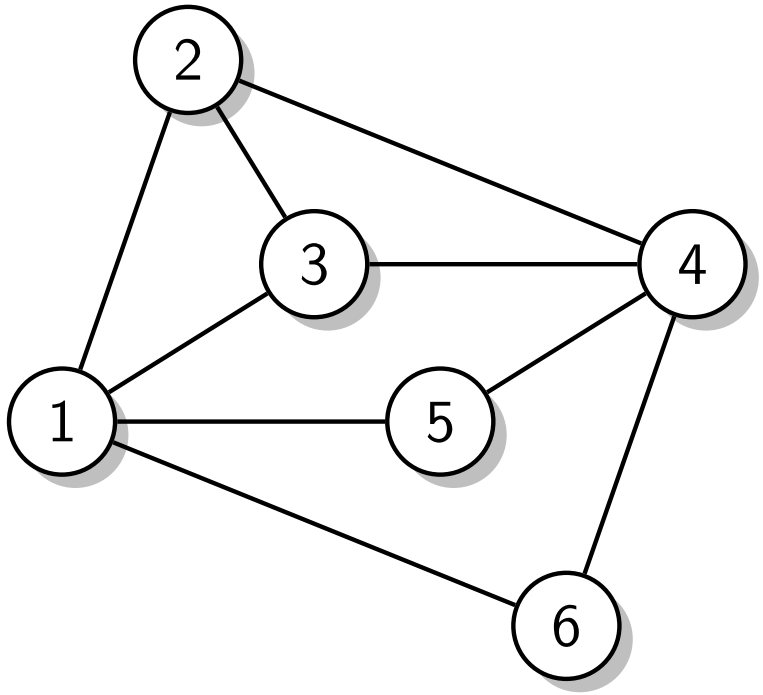
Další možné abstrakce

Vcholy grafu nemusí být nutně stanice. Graf můžeme chápat i tak, že vrcholy jsou jednotlivé tratě (čísla tratí). Dvě tratě spojíme hranou, pokud tyto dvě tratě na sebe navazují. V tomto případě hrany v grafu vyjadřují logický vztah, binární relaci „být propojen“.

Neorientovaný graf

Definice

Neorientovaným grafem nazýváme dvojici $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů, E je množina jednoprvkových nebo dvouprvkových podmnožin V. Prvky množiny E se nazývají **hrany** grafu a prvky množiny V se nazývají **vrcholy**.



Příklad

$G = (V, E)$

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}\}$

Neorientovaný graf

Poznámky

- Budeme uvažovat pouze **konečné grafy**, tedy grafy s konečnou množinou vrcholů V.
- Nekonečné grafy necháme stranou.
- Vzhledem k tomu, že jiné než neorientované grafy nebudeme definovat, můžeme označení neorientovaný vynechávat.

Literatura

Jiří Demel: Grafy a jejich aplikace, Academia, Praha, 2002

Neorientovaný graf

Hrany grafu

- Mějme hranu $e \in E$, kde $e = \{u, v\}$. Vrcholům u a v říkáme **krajní vrcholy** hrany e. Říkáme také, že jsou **incidentní** (nebo že **incidují**) s hranou e.
- O hraně e pak říkáme, že je **incidentní** s těmito vrcholy nebo také že **spojuje** tyto vrcholy.

Definice

Hranu spojující vrchol se sebou samým nazýváme **smyčkou**.

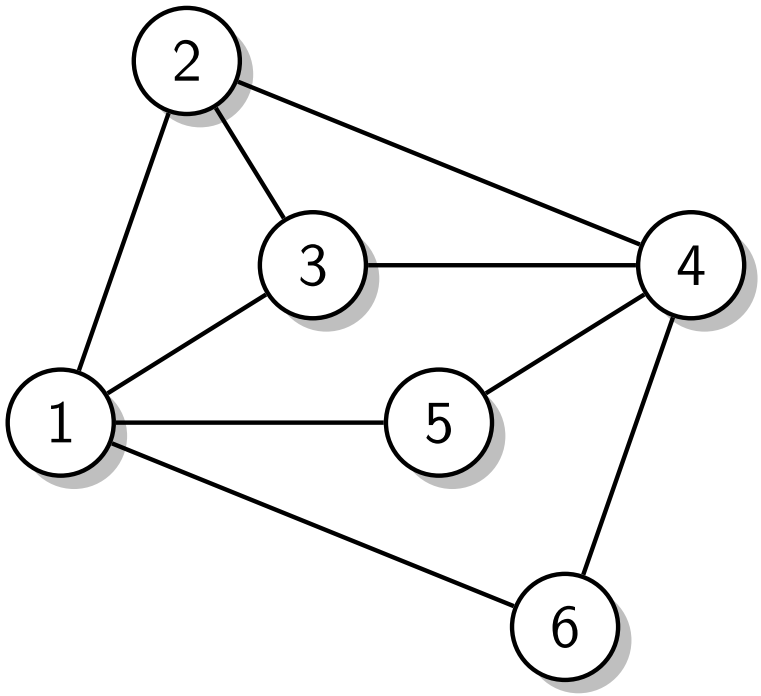
Stupeň vrcholu

Definice

Stupněm vrcholu nazýváme počet hran s vrcholem incidentních, tj.

$$s(v) = |\{e \in E \mid v \in e\}|.$$

Příklad



v	$s(v)$
1	4
2	3
3	3
4	4
5	2
6	2

Stupeň vrcholu (pokrač.)

Věta

Součet stupňů vrcholů libovolného grafu $G = (V, E)$ je roven dvojnásobku počtu jeho hran.

$$\sum_{v \in V} s(v) = 2|E|$$

Důkaz.

Zřejmý (v sumě se každá hrana počítá dvakrát). □

Podgraf

Definice

Graf $H = (V_H, E_H)$ nazýváme podgrafem grafu $G = (V_G, E_G)$, jestliže platí následující podmínky:

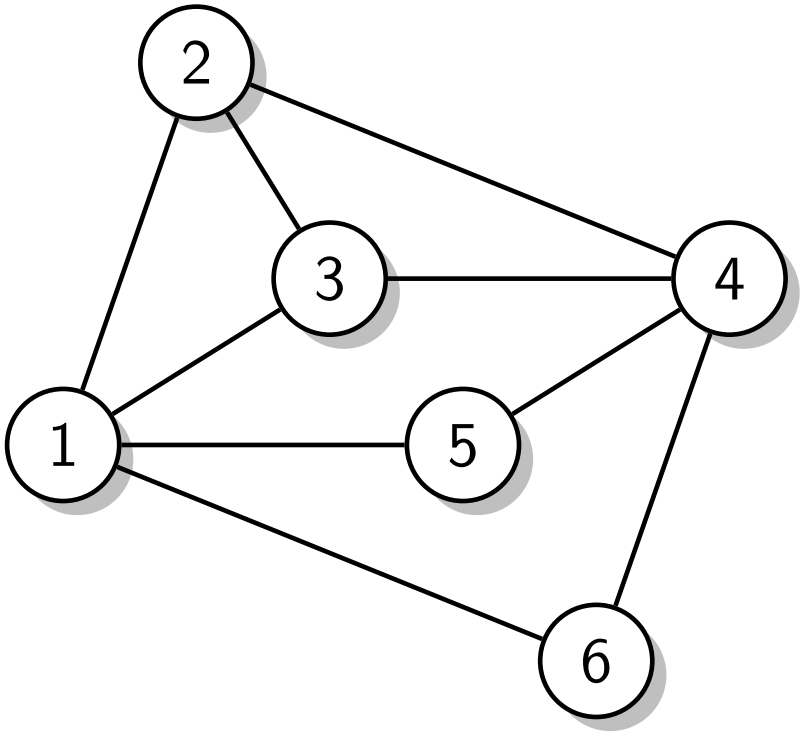
1. $V_H \subseteq V_G$
2. $E_H \subseteq E_G$
3. Hrany grafu H mají oba vrcholy v H.

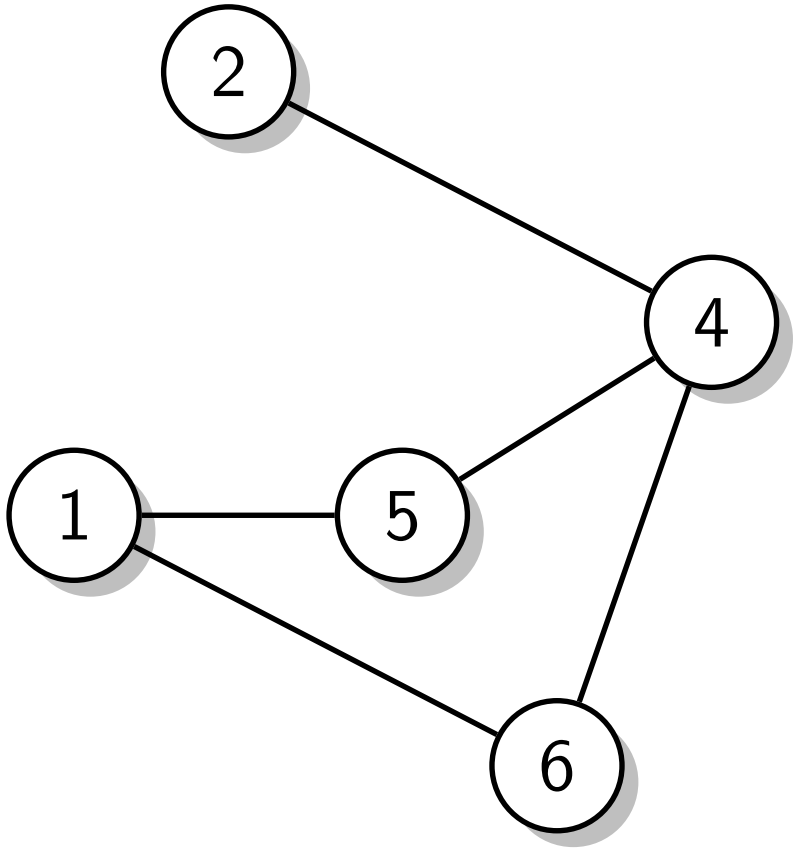
Poznámky

- Jinými slovy, podgraf vznikne vymazáním některých vrcholů původního grafu, všech hran do těchto vrcholů zasahujících a případně některých dalších hran.
- Termín podgraf se v teorii grafů používá jako jistá obdoba pojmu podmnožina.

Podgraf (pokrač.)

Příklad



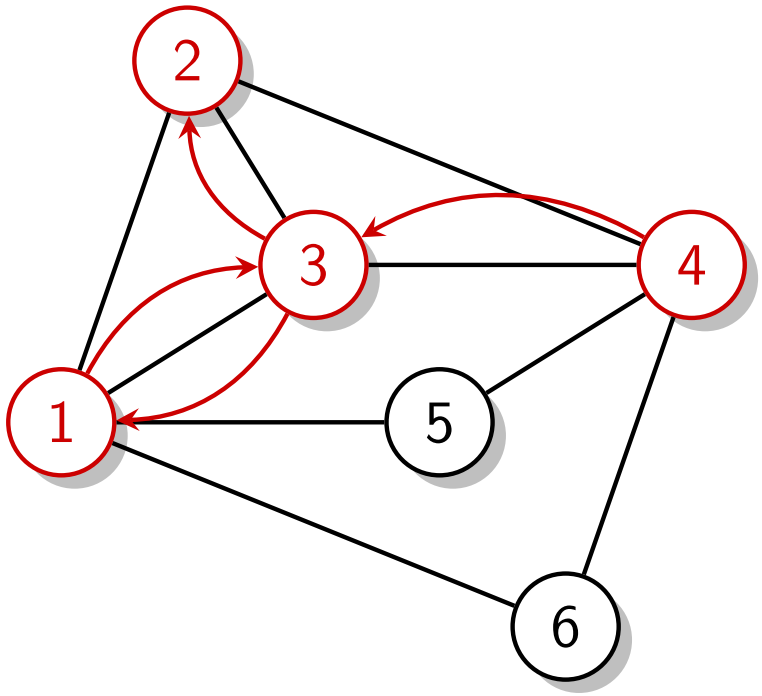


Sled

Definice

Posloupnost navazujících vrcholů a hran $v_1, e_1, v_2, \ldots, v_n, e_n, v_{n+1}$, kde $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ pro $1 \leq i \leq n$ nazýváme (neorientovaným) **sledem**.

Příklad



Sled

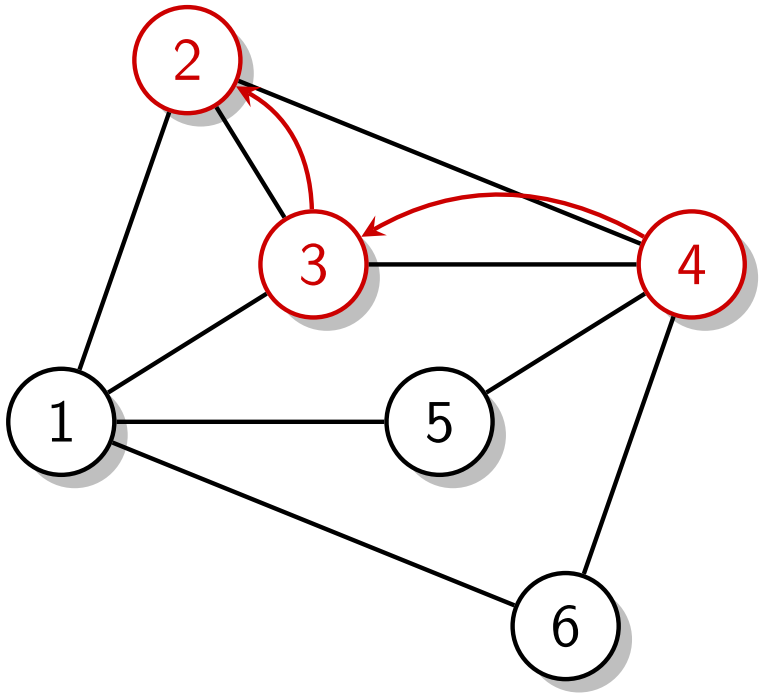
4 $\{4,3\}$ 3 $\{3,1\}$ 1 $\{1,3\}$ 3 $\{3,2\}$ 2

Cesta

Definice

Sled, v němž se neopakuje žádný vrchol nazýváme **cestou**. Tedy $v_i \neq v_j, \forall\ 1 \leq i \leq j \leq n$. Číslo n pak nazýváme **délkou cesty**.

Příklad



Cesta
4 3 2

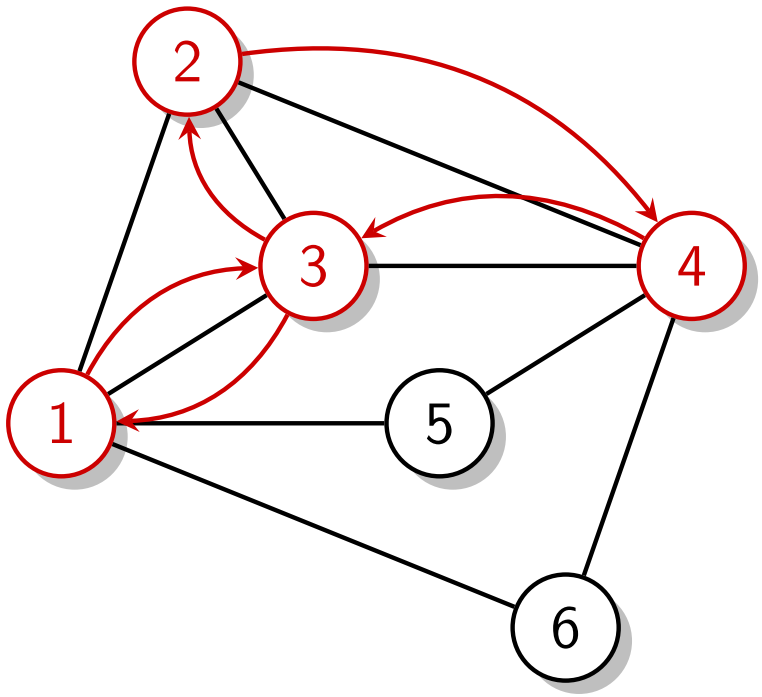
Z faktu, že se v cestě neopakují vrcholy, vyplývá, že se v ní neopakují ani hrany. Každá cesta je tedy zároveň i sledem.

Uzavřený sled

Definice

Sled, který má alespoň jednu hranu a jehož počáteční a koncový vrchol splývají, nazýváme **uzavřeným sledem**.

Příklad



Uzavřený sled

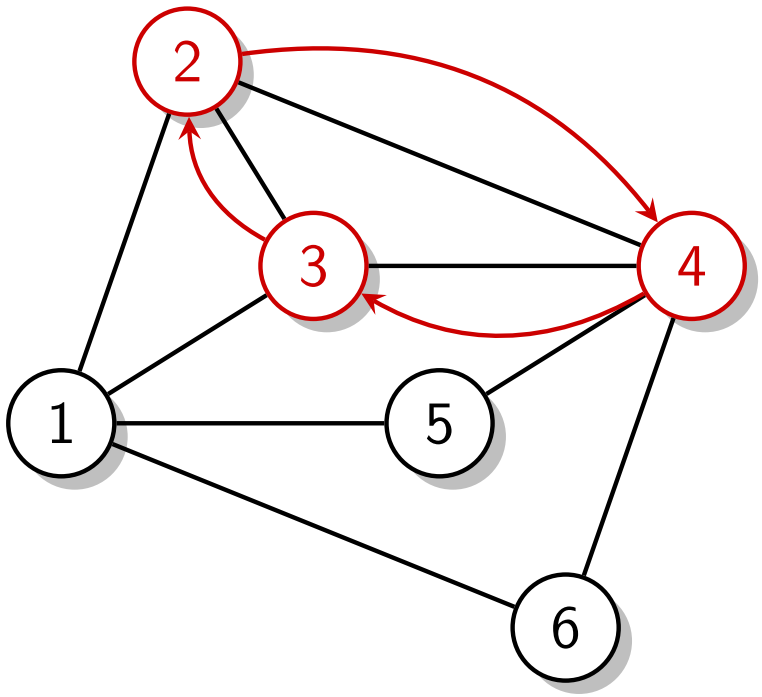
$4\ \{4,3\}\ 3\ \{3,1\}\ 1\ \{1,3\}\ 3\ \{3,2\}$
$2\ \{2,4\}\ 4$

Kružnice

Definice

Uzavřená cesta je uzavřený sled, v němž se neopakují vrcholy ani hrany. Uzavřená cesta se nazývá také **kružnice**.

Příklad



Kružnice
4 3 2

V definici kružnice jsme museli zakázat kromě opakování vrcholů i opakování hran proto, aby posloupnost v_1, e_1, v_2, e_1, v_1 nemohla být považována za kružnici.

Pojmy založené na cestách

Definice

Graf se nazývá **acyklický**, jestliže neobsahuje kružnici.

Definice

Graf se nazývá **souvislý**, jestliže mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta.

Věta

Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf. Pak platí $|E| \geq |V| - 1$.

Důkaz.

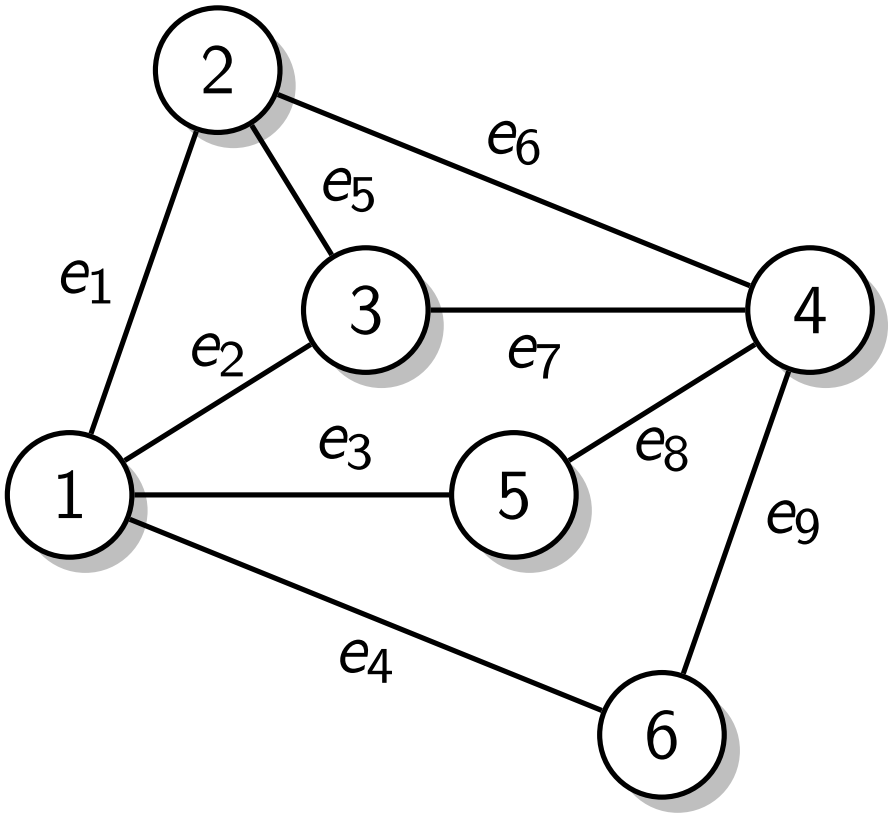
Zřejmý. □

Způsoby zadání grafu

- grafickou formou:
  - prostě obrázkem,
  - asi nejsrozumitelnější forma pro člověka,
  - vhodné pro grafy s malým počtem vrcholů,
  - prakticky nemožnost zpracování počítačem.
- maticí,
- seznamem sousedících vrcholů.

Matice incidence

- Počet řádků matice odpovídá počtu vrcholů, počet slopuců odpovídá počtu hran.
- Pokud je vrchol incidentní s hranou, je na dané pozici jednička, jinak nula.

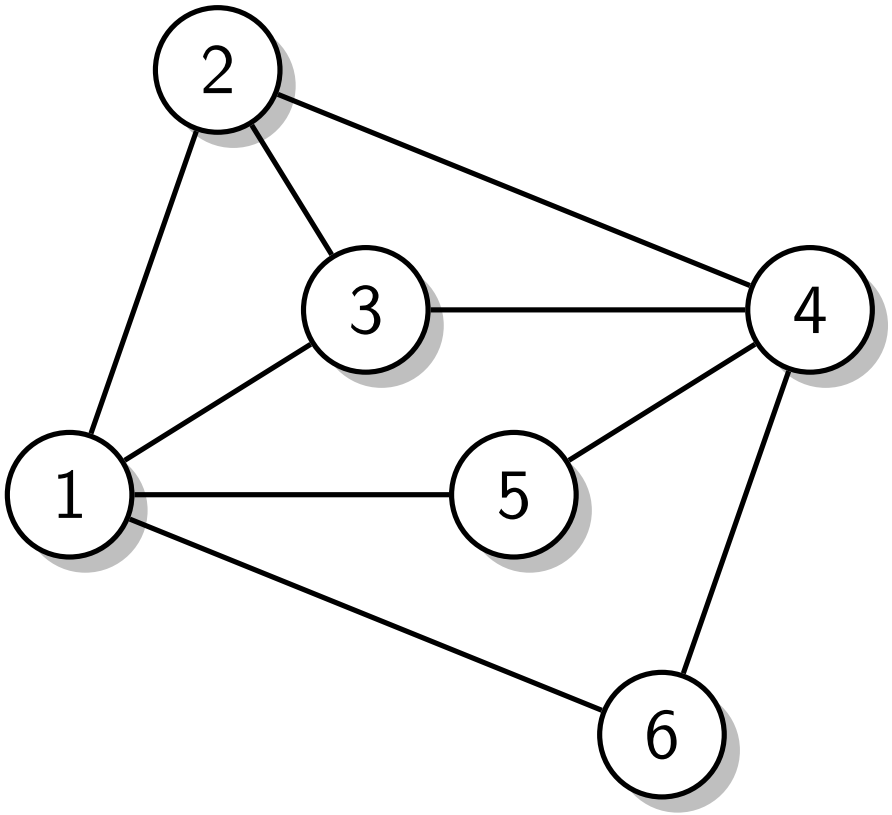


Matice incidence

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice sousednosti

- Čtvercová matice, kde řád matice odpovídá počtu vrcholů v grafu.
- Pokud jsou dva vrcholy spojeny hranou, je na dané pozici jednička, jinak nula.

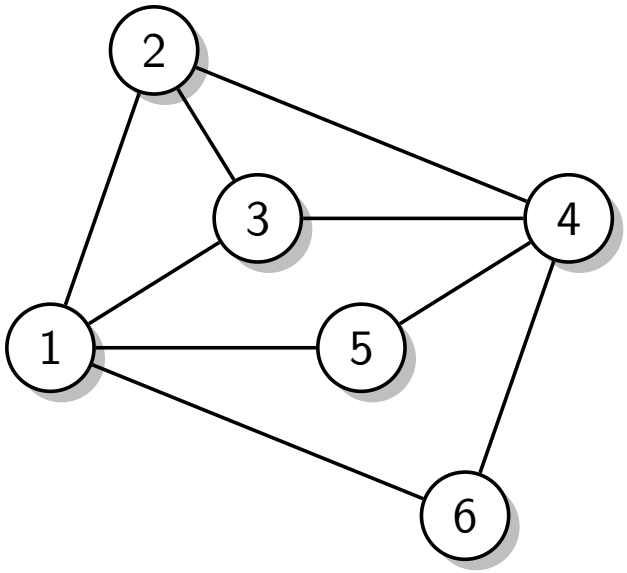


Matice sousednosti

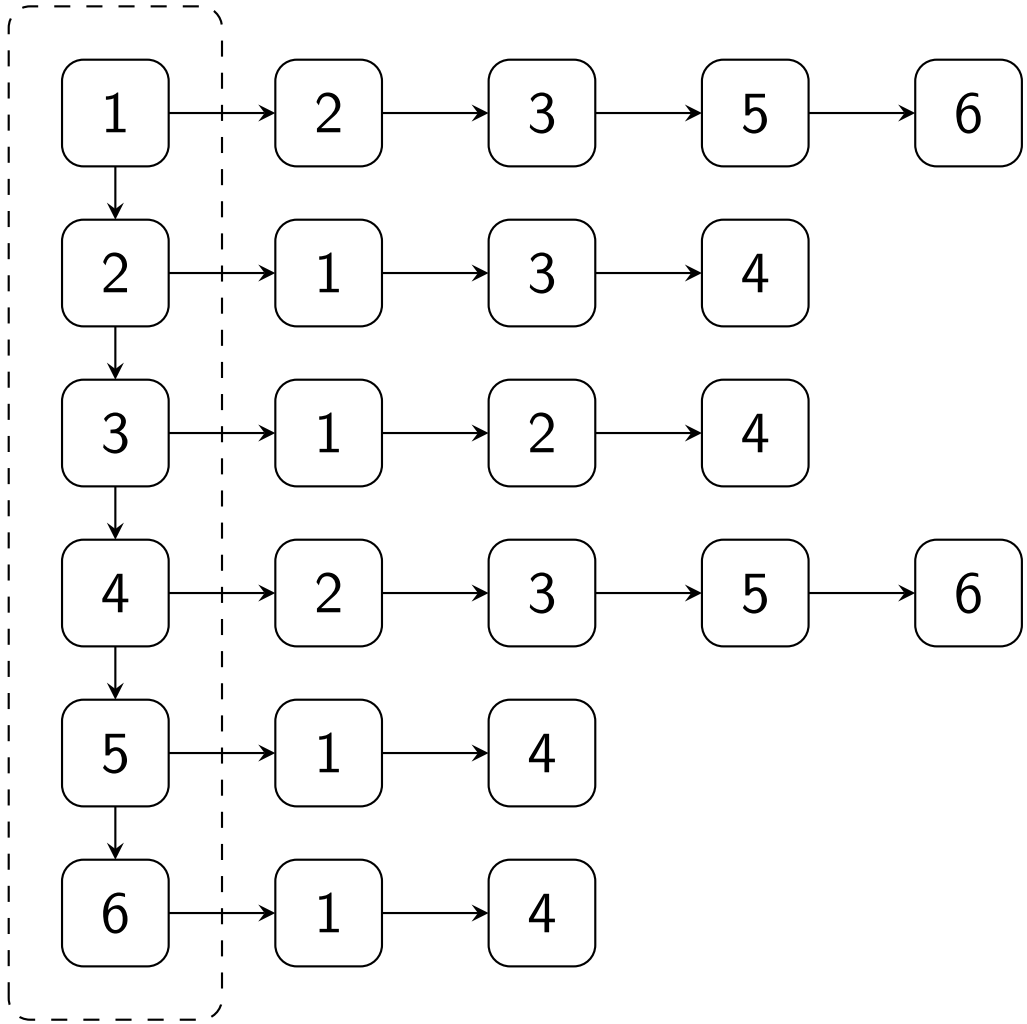
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Seznam sousedících vrcholů

Graf



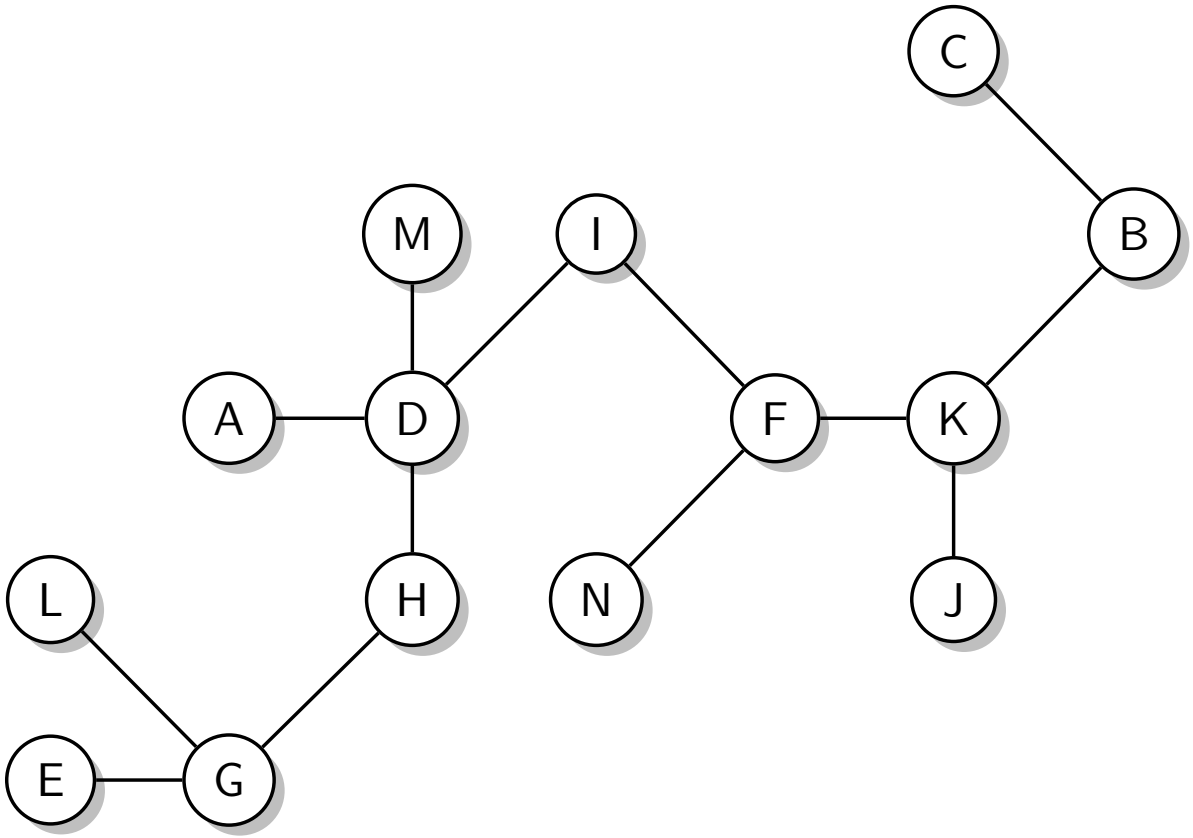
Seznam sousedících vrcholů



Volný strom

Definice

Souvislý, acyklický, neorientovaný graf nazýváme **volným stromem** (angl. free tree).



Poznámka

Prázdný graf je možné považovat za strom, tzv. prázdný strom.

Volný strom – terminologie

- V teorii grafů se objekty, které propojujeme hranami nazývají obvykle vrcholy (angl. vertex, vertices).
- Pokud mluvíme o stromech lze pro vrchol používat i výraz **uzel** (angl. **node**).
- Označení vrchol a uzel je rovnocenné, jde spíše o zvyklost.

Vlastnosti volného stromu

Věta

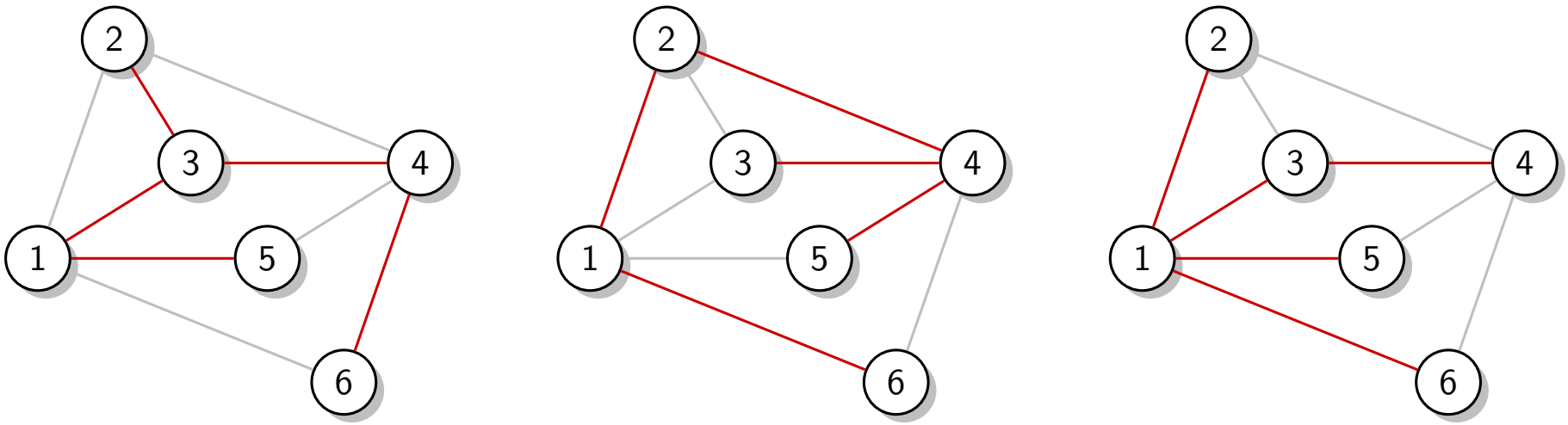
Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf, potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. *G je volný strom.*
2. *Každé dva vrcholy v G jsou spojeny právě jednou cestou.*
3. *G je souvislý, ale pokud odebereme libovolnou hranu, získáme nesouvislý graf.*
4. *G je souvislý, a $|E| = |V| - 1$.*
5. *G je acyklický, a $|E| = |V| - 1$.*
6. *G je acyklický. Přidáním jediné hrany do množiny hran E bude výsledný graf obsahovat kružnici.*

Kostra grafu (angl. Spanning tree)

Definice

Kostrou souvislého grafu G nazýváme takový podgraf grafu G na množině všech jeho vrcholů, který je stromem.



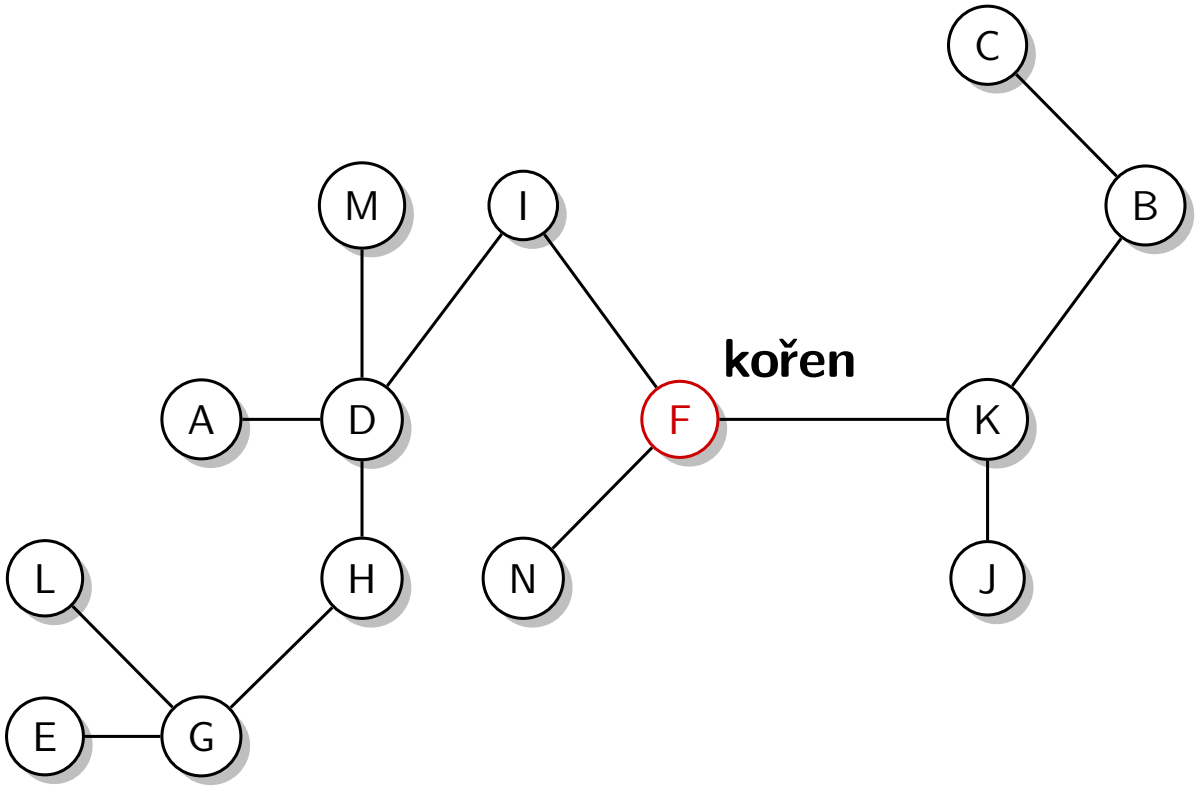
Poznámky

- Kostra musí obsahovat všechny vrcholy původního grafu G.
- Koster grafu může být více.

Kořenový strom

Definice

Volný strom, který obsahuje jeden odlišný vrchol, se nazývá **kořenový strom** (angl. rooted tree). Odlišný vrchol se nazývá **kořen** stromu.

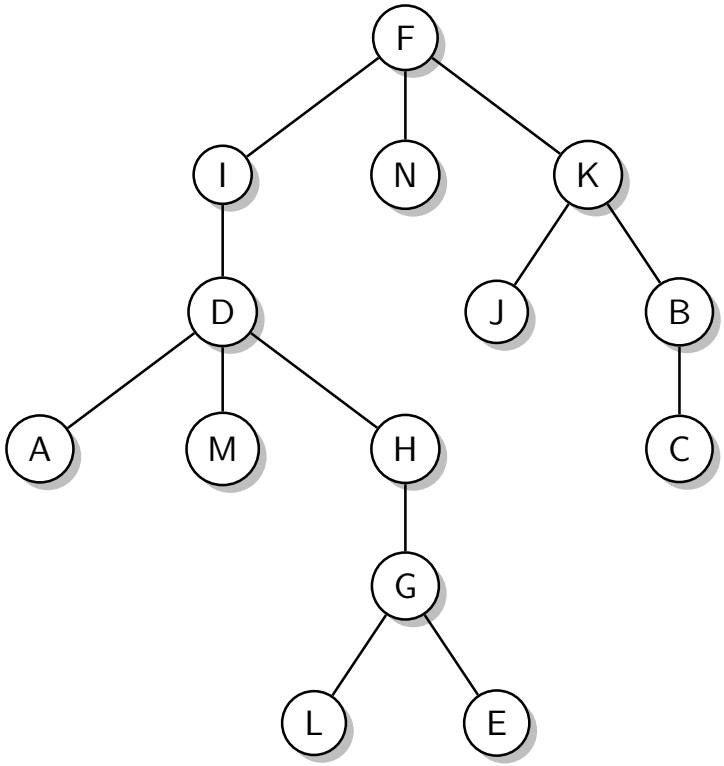


Poznámka

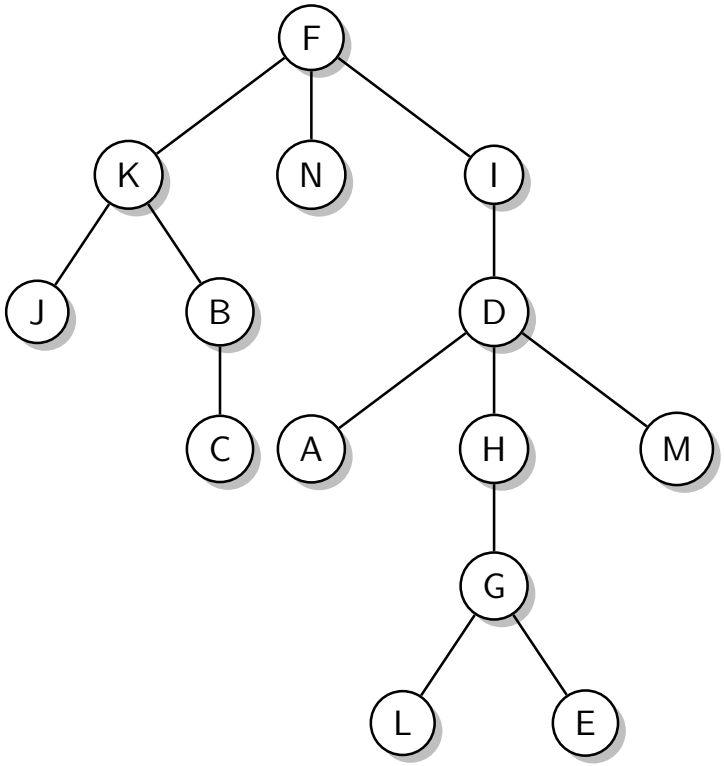
Někdy se používá také označení **zakořeněný strom**.

Kořenový strom – obvyklá vizualizace

Vizualizace 1



Vizualizace 2



Obě vizualizace jsou kořenový strom **rovnocenné**! Neexistuje „vlevo“ či „vpravo“.

Kořenový strom – základní pojmy

Uvažujme vrchol x v kořenovém stromu T s kořenem r.

Předchůdce Libovolný vrchol y na jednoznačné cestě od kořene r do vrcholu x se nazývá **předchůdce** vrcholu x.

Následovník Jestliže y je předchůdce x, potom x se nazývá **následovník** vrcholu y.

Rodič, potomek Jestliže poslední hrana na cestě z kořene r do vrcholu x je hrana (y, x), potom se vrchol y nazývá **rodič** vrcholu x a vrchol x je **potomek** vrcholu y.

Sourozenci Dva vrcholy mající stejného rodiče se nazývají **sourozenci**.

List Vrchol bez potomků se nazývá vnější vrchol nebo-li **list**.

Vnitřní vrchol Nelistový vrchol se nazývá **vnitřním** vrcholem stromu.

Kořenový strom – základní pojmy (pokrač.)

Poznámky

- Každý vrchol je pochopitelně předchůdcem a následovníkem sama sebe.
- Jestliže y je předchůdce x a zároveň $x \neq y$, potom y je vlastní předchůdce vrcholu x a x je vlastní následovník vrcholu y.
- Kořen stromu je jediným vrcholem ve stromu bez rodiče.
- Vrchol je obecný pojem. Každý list a vnitřní vrchol je zároveň vrchol (bez přívlastku). Srovnej: člověk, žena, muž.

Stupeň vrcholu

Počet potomků vrcholu x v kořenovém stromu se nazývá **stupeň vrcholu** x.

Poznámky

- Metoda výpočtu stupně vrcholu se u kořenového stromu liší od výpočtu ve volném stromu.
- V kořenovém stromu se nepočítá rodič.
- Ve volném stromu pojem rodiče neexistuje, existují jen sousední vrcholy, počítají se tudíž všechny vrcholy.

Hloubka vrcholu, výška stromu

Hloubka vrcholu

Délka cesty od kořene stromu k vrcholu x se nazývá **hloubka vrcholu** x ve stromu T.

Výška stromu

Největší hloubka libovolného vrcholu se nazývá **výška stromu** T.

Seřazený strom

Definice

Kořenový strom ve kterém je určeno pořadí potomků se nazývá **seřazený strom** (angl. ordered tree).

Poznámky

- Tudíž, pokud vrchol má k potomků, lze určit prvního potomka, druhého potomka, až k-tého potomka.
- Pokud ale například prvního potomka zrušíme, ostatní potomci se posouvají! Druhý potomek se stane prvním, druhý třetím atd. Nelze mít mezi potomky „prázdnou pozici“.

Kontrolní otázky

1. Definujte pojem neorientovaný graf.
2. Čím se liší orientovaný graf od neorientovaného?
3. Co je to stupeň uzlu?
4. Co je to sled?
5. Co je to cesta?
6. Co je to délka cesty?
7. Co je to uzavřený sled, uzavřená cesta? Jaké je alternativní pojmenování uzavřené cesty?
8. Co znamená, že graf je acyklický?
9. Co znamená, že graf je souvislý?
10. Jak zní definice volného stromu?
11. Kolik existuje mezi dvěma vrcholy volného stromu cest?

Kontrolní otázky (pokrač.)

12. Kolik hran musíme minimálně přidat do volného stromu, abychom dostali graf s kružnicí?
13. Kolik hran musíme z volného stromu nejméně odebrat, abychom dostali nesouvislý graf?
14. Má-li volný strom $|V|$ vrcholů, kolik má hran?
15. Co je to kořenový strom?
16. Vysvětlete pojem předchůdce uzlu.
17. Vysvětlete pojem následovník uzlu.
18. Vysvětlete pojem rodič uzlu.
19. Vysvětlete pojem potomek uzlu.
20. Vysvětlete pojem sourozenec uzlu.
21. Vysvětlete pojem list.
22. Vysvětlete pojem vnitřní uzel.

Kontrolní otázky (pokrač.)

23. Jak se liší definice stupně uzlu pro obecný graf a kořenový strom?
24. Co je to hloubka uzlu.
25. Jak je definována výška stromu?
26. Co je to seřazený strom?
27. Lze v seřazeném stromu u uzlu s jediným potomkem rozlišit, jestli je levý nebo pravý, první či druhý?

Děkuji za pozornost